ALGÈBRE. — *La Théorie de Galois dans les Catégories monoïdales.*
Note (*) de **Thomas S. Ligon,** présentée par Jean Dieudonné.

Nous généralisons la théorie de Galois, de Chase et Sweedler ([1]) pour les anneaux commutatifs de sorte qu'elle comprenne le cas des monoïdes commutatifs dans une catégorie monoïdale et l'étendons par une discussion des monoïdes de Hopf normaux.

We generalize the Galois theory of Chase and Sweedler ([1]) for commutative rings to include the case of commutative monoids in a monoidal category and extend it by a discussion of normal Hopf monoids.

Dans cet article, nous supposons que **C** est une catégorie monoïdale symétrique close avec des limites et colimites finies. Nous utilisons la notation et les concepts « fini » et « fidèlement projectif » de Pareigis ([4]). S désignera un monoïde commutatif dans **C** et A un monoïde de Hopf (avec antipodisme λ) fini commutatif (défini exactement comme une algèbre de Hopf dans le cas spécial $\mathbf{C}=k$-mod).

DÉFINITION. — (*a*) S est appelé A-coobjet-monoïde si :
(i) $\alpha : S \to S \otimes A$ est un morphisme de monoïdes, et
(ii) (S, α) est un A-coobjet;
(*b*) dans le cas (*a*), nous définissons :
(i) $\beta \in \mathbf{C}(A^* \otimes S, S) = \mathbf{C}(S, S \otimes A) \ni \alpha$, *et*
(ii) $\gamma := (\nabla_S \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_S \otimes \alpha)$;
(*c*) un A-coobjet-monoïde S est appelé A-galoisien sur I si
(i) S est fidèlement projectif sur I, et
(ii) γ est un isomorphisme dans **C**;
(*d*) si (M, α) est un A-coobjet, nous définissons l'objet fixe M^{A^*} comme noyau de α et $\mathrm{id} \otimes \eta : M \to M \otimes A$;
(*e*) si S est un A-coobjet-monoïde et $S^{A^*} = I$, nous définissons

$$D := S \# A^*, \qquad Q := D^{A^*},$$

$$\psi := \nabla_S(\mathrm{id}_S \otimes \beta) \in \mathbf{C}(S \otimes A^* \otimes S, S) = \mathbf{C}(D \otimes S, S),$$

$$f := \nabla_D(j_S \otimes j_Q) \in {}_D\mathbf{C}_D(S \otimes Q, D),$$

et

$$g := \psi(j_Q \otimes \mathrm{id}_S) \in \mathbf{C}(Q \otimes_D S, I),$$

où

$$j_S : S \to D \qquad \text{et} \qquad j_Q : Q \to D$$

sont les inclusions canoniques. g est bien défini à cause de $Q = D^{A^*}$ et $S^{A^*} = I$.

THÉORÈME. — *Si* S *est un* A-*coobjet-monoïde, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(*a*) S *est* A-*galoisien sur* I;
(*b*) S *est fidèlement projectif sur* I *et* $S \# A^* \to [S, S]$ *est un isomorphisme;*
(*c*) $S^{A^*} = I$ *et f et g sont rationnellement surjectifs.*

La preuve de ce théorème est constituée essentiellement de techniques de dualisation pour les objets finis. La condition (*c*), qui est étroitement liée à la théorie de Morita de Pareigis ([4]), sera utilisée dans la preuve du théorème fondamental.

THÉORÈME. — *Soit* H *un monoïde de Hopf fini. Alors nous avons des objets finis* P *et* P′ *tels que* $H^* \cong P \otimes H$ *en tant que* H-*objet à droite et* $H \cong P' \otimes H^*$ *en tant que* H^*-*objet à droite.*

La preuve de cette propriété de Frobenius affaiblie mais bien utile pour les monoïdes de Hopf est constituée par une considération des objets de Hopf (= modules de Hopf) et une construction de P et P′ comme objets fixes.

THÉORÈME. — *Soient* A *et* B *des monoïdes de Hopf finis commutatifs et* $e : A \to B$ *un morphisme de monoïdes de Hopf qui est une rétraction dans* **C**. *Alors* e *est le conoyau de* $\varepsilon\eta$ *et l'inclusion* $j : A^{B^*} \to A$.

La preuve de ce théorème utilise le fait que A est A-galoisien sur I de même que $A^{B^*} \otimes B$-galoisien sur A^{B^*}.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Soient* A, B_1 *et* B_2 *des monoïdes de Hopf finis commutatifs,* $e_i : A \to B_i$ *un morphisme de monoïdes de Hopf qui est une rétraction dans* **C**, S *un monoïde commutatif, et soit* S A-*galoisien sur* I. *Alors :*

(*a*) $S^{A^*} = I$;

(*b*) S *est* $S^{B^*} \otimes B$-*galoisien sur* S^{B^*};

(*c*) $B_1^* \subset B_2^*$ *si et seulement si* $S^{B_2^*} \subset S^{B_1^*}$.

La preuve du théorème fondamental, (*a*) et (*b*), utilise les diverses caractérisations du concept « A-galoisien » données plus haut, et (*c*) utilise le dernier théorème.

DÉFINITION. — Soient H et H′ des monoïdes de Hopf finis cocommutatifs et $i : H' \to H$ un morphisme de monoïdes de Hopf qui est une section dans **C** :

(*a*) nous définissons $\pi : H \to H//H'$ comme conoyau de $\mathrm{id} \otimes \varepsilon$ et $\nabla(\mathrm{id} \otimes i) : H \otimes H' \to H$;

(*b*) H′ est appellé sous-monoïde de Hopf normal si et seulement si $H//H'$ possède une structure de monoïde de Hopf unique telle que π soit un morphisme de monoïdes de Hopf.

THÉORÈME. — *Dans ce cas-ci, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) H′ *est normal dans* H;

(*b*) *les paires* $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon, \nabla(\mathrm{id} \otimes i))$ *et* $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}, \nabla(i \otimes \mathrm{id}))$ *ont le même conoyau;*

(*c*) $\rho : H \otimes H' \to H$ *défini par* $\rho(a \otimes b) = a_1\, i(b)\, \lambda(a_2)$ *factorise par* $i : H' \to H$.

On prouve ce théorème à l'aide de la propriété de limite donnée juste avant le théorème fondamental, et d'autres propriétés universelles.

Remarques. — (*a*) si $\mathbf{C} = k-\mathrm{mod}$ et $H^+ = ke(\varepsilon)$, nous verrons que la condition (*b*) du théorème est équivalente à $HH'^+ = H'^+ H$, la définition de la normalité de Newman ([3]).

(*b*) dans le cas où H est une algèbre de groupe ou l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie, la condition (*c*) du théorème se réduit à la définition d'un sous-groupe normal ou d'un idéal de Lie.

THÉORÈME. — *Soit* S A-*galoisien sur* I *et* B *un monoïde quotient de Hopf normal de* A. *Alors* S^{B^*} *est* A^{B^*}-*galoisien sur* I.

La preuve de ce théorème utilise les caractérisations des concepts « galoisien » et « normal » données plus haut, et les diagrammes universels.

Le prochain théorème, qui est de pure théorie des catégories, est utile quand on considère les produits tensoriels topologiques.

THÉORÈME. — *Soit* **C** *une catégorie arbitraire et* **L** (*resp.* **R**) *une sous-catégorie pleine, épi-réflective* (*resp. mono-coréflective*), *close relative aux isomorphismes, avec réflecteur* $L : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ (*resp. coréflecteur* $R : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$). *Alors* $R(\mathbf{L}) \subset \mathbf{L}$ *si et seulement si* $L(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$.

La preuve est constituée par une chasse de diagrammes.

THÉORÈME. — *La catégorie des espaces vectoriels topologiques (sur* **R** *ou* **C***) quasi complets, séparés et tonnelés est une catégorie monoïdale symétrique close.*

Cette propriété n'a pas mené à de nouveaux exemples de la théorie de Galois développée plus haut, parce que les objets bien connus ne sont pas finis. Cependant, M. D. Puppe a étudié cette espèce d'objets « fini » ou « fortement dualisable » dans la catégorie d'homotopie stable (colloque, Munich, 13 juillet 1978).

(*) Séance du 30 octobre 1978.

(1) S. U. CHASE et M. E. SWEEDLER, *Hopf Algebras and Galois Theory* (*Lecture Notes* n° 97, Springer-Verlag, Berlin, 1969).

(2) K. NEWMAN, *J. of Algebra*, 36, 1975, p. 1-15.

(3) T. S. LIGON, *Algebra-Berichte*, 35, Uni-Druck, München, 1978.

(4) B. PAREIGIS, *Publ. Math. Debrecen*, 24, 1977, p. 189-204 et 351-361; 25, 1978, p. 177-186.

Voitstr. 12/III 8000 *München* 19, *R.F.A.*